DERIVADAS

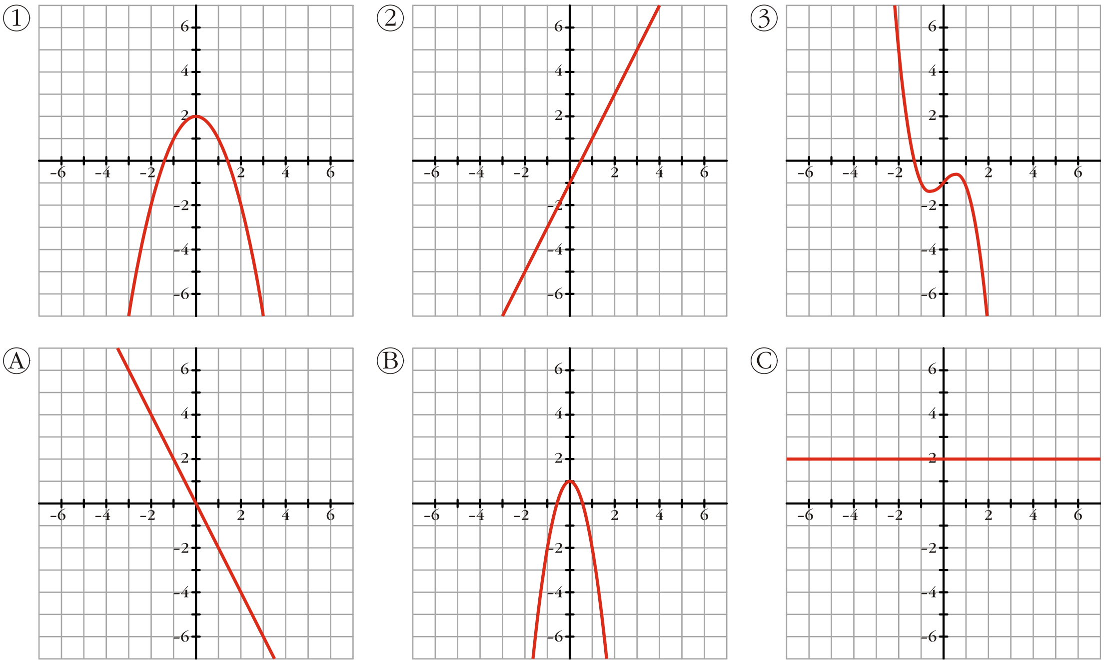
Definición de derivada

Ejercicio nº 1.-

Las gráficas A, B y C son las funciones derivadas de las gráficas 1, 2 y 3, pero en otro orden.

¿Cuál es la derivada de cual?

Justifica tus respuestas.



Ejercicio nº 2.-

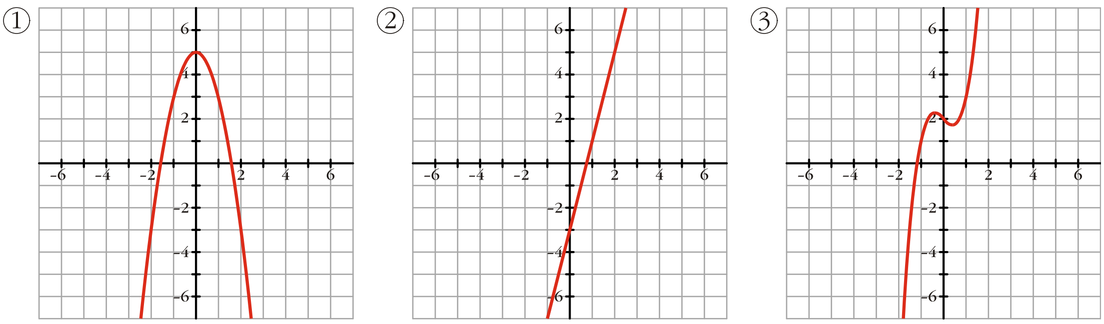
Calcula la derivada de $f(x) = x^2 + x + 1$ en $x_0 = 0$ utilizando la definición.

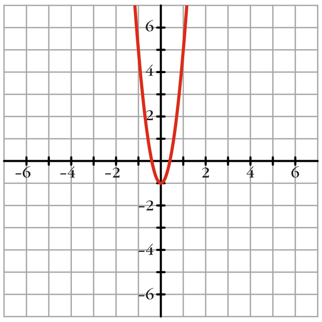
Ejercicio nº 3.-

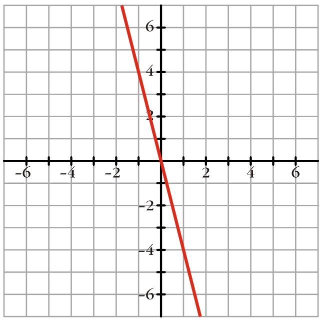
Las gráficas A, B y C son las funciones derivadas de las gráficas 1, 2 y 3, pero en otro orden.

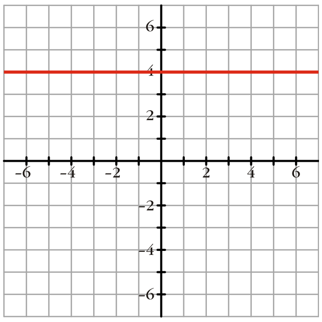
¿Cuál es la derivada de cual?

Justifica tus respuestas.



A


B


C


Ejercicio nº 4.-

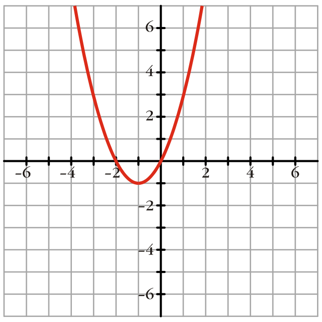
Halla la derivada de $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $x_0 = 0$ utilizando la definición.

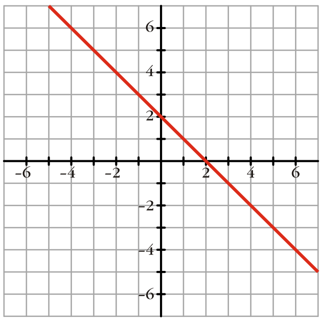
Ejercicio nº 5.-

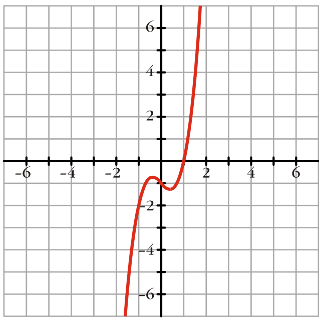
Las gráficas A, B y C son las funciones derivadas de las gráficas 1, 2 y 3, pero en otro orden.

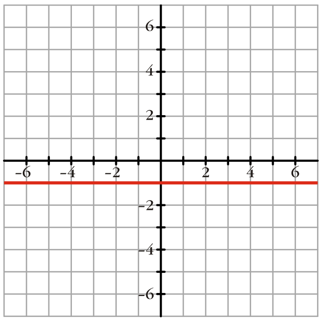
¿Cuál es la derivada de cual?

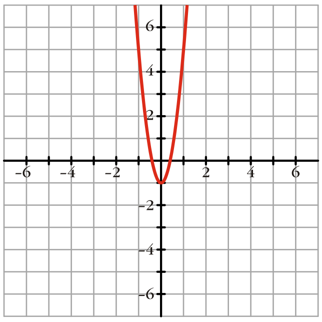
Justifica tus respuestas.

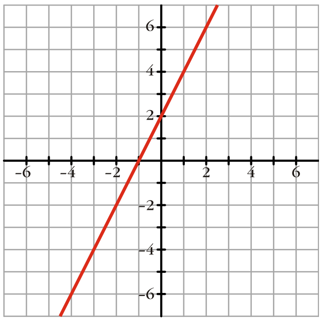
1


2


3


A


B


C


Ejercicio nº 6.-

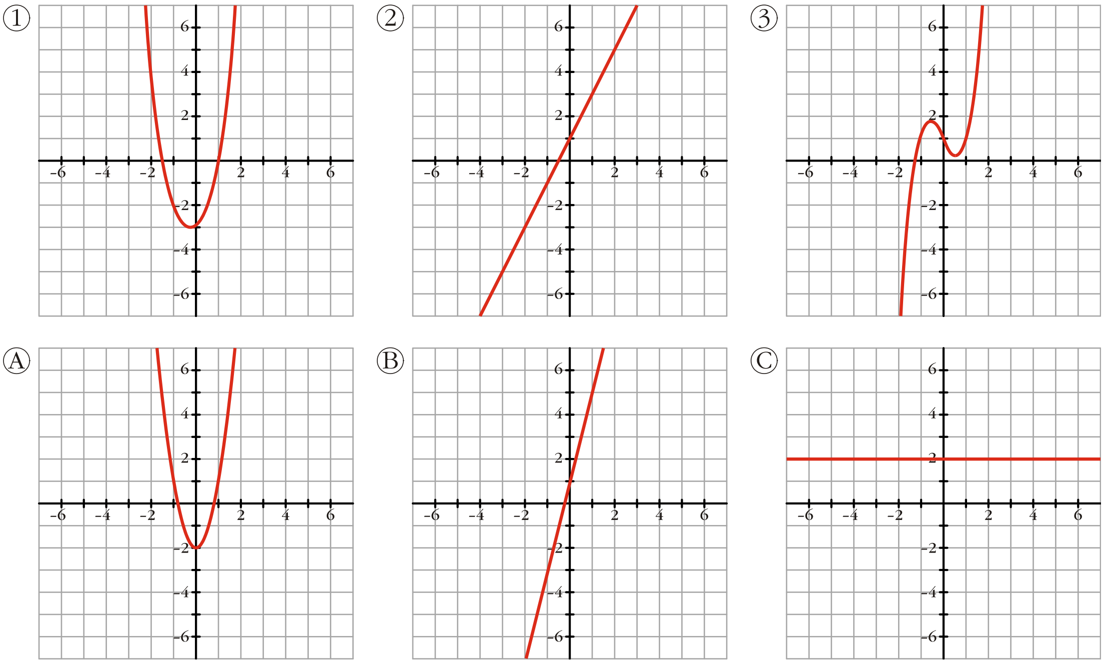
Utilizando la definición, calcula $f'(1)$, sabiendo que $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Ejercicio nº 7.-

Las gráficas A, B y C son las funciones derivadas de las gráficas 1, 2 y 3, pero en otro orden.

¿Cuál es la derivada de cual?

Justifica tus respuestas.



.

__Ejercicio nº 8.-__

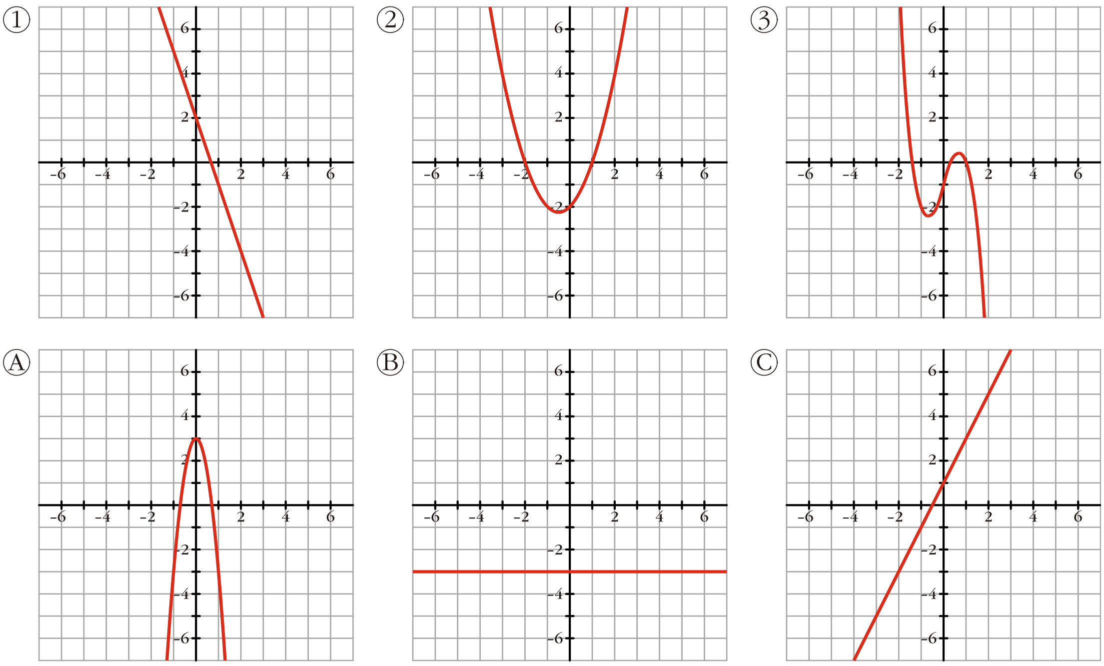
Si $f(x) = 2x^2 - 3$ halla su derivada en $x_0 = 1$ utilizando la definición.

__Ejercicio nº 9.-__

Las gráficas A, B y C son las funciones derivadas de las gráficas 1, 2 y 3, pero en otro orden.

¿Cuál es la derivada de cual?

Justifica tus respuestas.



Ejercicio nº 10.-

Si $f(x) = -x^2 + 1$, halla su derivada en $x_0 = 2$ utilizando la definición.

Continuidad y derivabilidad

Ejercicio nº 11.-

Hallar a y b para que la función $f(x)$ sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} a & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 4x & \text{si} \quad 1\le x \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad de f.

Ejercicio nº 12.-

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función definida del siguiente modo:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+2 & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 3x+1 & \text{si} \quad 1\le x \end{cases}$$

Ejercicio nº 13.-

Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x<0 \\ x-2 & \text{si} \quad 0\le x<4 \\ x^2-4 & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$, estudiar la continuidad y derivabilidad.

Ejercicio nº 14.-

Calcular m y n para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+m & x\le -1 \\ x^2-nx & x>-1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 15.-

Hallar a y b para que la función $f(x)$ sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} -ax & \text{si} \quad x<-1 \\ ax-b & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ 2x & \text{si} \quad 1\le x \end{cases}$$

Para los valores de a y b obtenidos, estudia la derivabilidad.

Cálculo de derivadas

Ejercicio nº 16.-

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = ln\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$ b) $y = \sqrt[3]{cos\left(x^3 - 1\right)}$

Ejercicio nº 17.-

Aplica la derivación logarítmica para derivar:

$y = x^{cos\,x}$

Ejercicio nº 18.-

Calcula la derivada de la siguiente función implícita: $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Ejercicio nº 19.-

Sabiendo que la derivada de $f(x) = cos\,x$ **es** $f'(x) = -sen\,x$, **calcula la derivada de** $f^{-1}(x) = arc\,cos\,x$.

Ejercicio nº 20.-

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{3^{5x}}{2x-1}$ b) $y = 3^x \cdot cos\left(x^2 - 1\right)$

Ejercicio nº 21.-

Aplica la derivación logarítmica para derivar:

$y = (x+1)^{x^2}$

Ejercicio nº 22.-

Halla y' **sabiendo que:** $x^2 + y^2 = x^2 \cdot y^2$.

Ejercicio nº 23.-

Dada la función $f(x) = e^x$ **y conocida su derivada** $f'(x) = e^x$. **Halla la derivada de la función** $f^{-1}(x) = ln\,x$.

Ejercicio nº 24.-

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 4 \cdot arc\,cos\sqrt{x}$ b) $y = log_3\left(x^2 - 4\right)$

Ejercicio nº 25.-

Aplica la derivación logarítmica para derivar:

$$y = \left(\frac{2}{x}\right)^x$$

Ejercicio nº 26.-

Dada la función implícita $x^2 - 3xy - 2y^2 = 4$, calcula su derivada.

Ejercicio nº 27.-

Conocida la función $f(x) = \ln x$ y su derivada $f'(x) = \frac{1}{x}$, calcula la derivada de $f^{-1}(x) = e^x$.

Ejercicio nº 28.-

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \ln \frac{4-5x}{2x+3}$ b) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$

Ejercicio nº 29.-

Mediante la derivación logarítmica, calcula la derivada de $y = (\ln x)^x$.

Ejercicio nº 30.-

Halla la derivada de la siguiente función implícita: $x^3 + 6xy + y^3 = 8$.

Ejercicio nº 31.-

Teniendo en cuenta que la derivada de la función $f(x) = tg\, x$ es $f'(x) = 1 + tg^2\, x$, halla la derivada de $f^{-1}(x) = arc\, tg\, x$.

Ejercicio nº 32.-

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 5 \cdot arctg(2x-1)$ b) $y = \sqrt[3]{x^5+2}$

Ejercicio nº 33-

Deriva logarítmicamente la siguiente función:

$$y = (\cos x)^x$$

Ejercicio nº 34.-

Calcula la derivada de la siguiente función implícita: $xy - 2x + 3y = 4$.

Ejercicio nº 35.-

Conocida la función $f(x) = x^5$ y su derivada $f'(x) = 5x^4$. Calcula la derivada de $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$.

Cuestiones sobre derivadas

Ejercicio nº 36.-

Demuestra que la función $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ no es derivable ni en $x = -2$ ni en $x = 1$.

Ejercicio nº 37.-

Demuestra, utilizando la definición de derivada, que la función $f(x) = (x + 1) \cdot |x|$ no es derivable en $x = 0$.

.

Ejercicio nº 38.-

Prueba que la función $f(x) = \ln \cos x$, verifica la siguiente igualdad:

$$f''(x) = \frac{-1}{e^{2f(x)}}$$

Ejercicio nº 39.-

Demuestra que todas las derivadas de orden par de la función $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ se anulan para el valor $x = \pi$.

Ejercicio nº 40.-

Prueba que la función $f(x) = e^x \cos x$ verifica la siguiente ecuación:

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$$

SOLUCIONES EJERCICIOS DE DERIVADAS

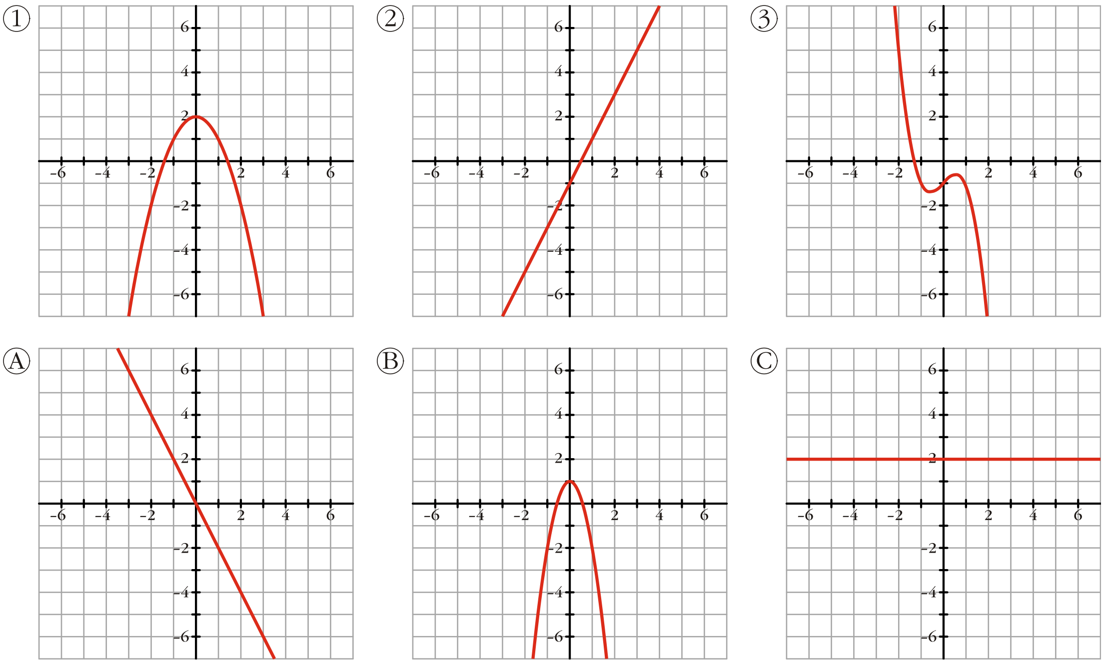
Definición de derivada

Ejercicio nº 1.-

Las gráficas A, B y C son las funciones derivadas de las gráficas 1, 2 y 3, pero en otro orden.

¿Cuál es la derivada de cual?

Justifica tus respuestas.



Solución:

1 – A, 2 – C, 3 – B.

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente y es negativa donde la función decrece.

Ejercicio nº 2.-

Calcula la derivada de $f(x) = x^2 + x + 1$ en $x_0 = 0$ utilizando la definición.

Solución:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^2+h+1-1}{h} = \frac{h^2+h}{h} = h+1$$

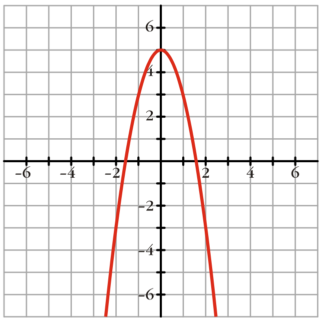
$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+1) = 1$$

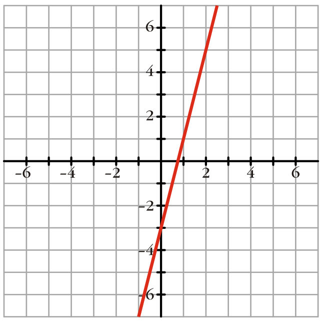
Ejercicio nº 3.-

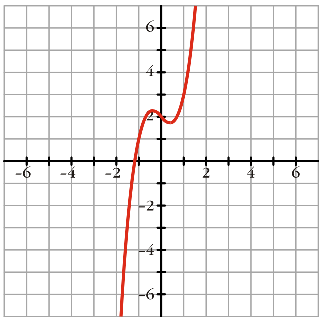
Las gráficas A, B y C son las funciones derivadas de las gráficas 1, 2 y 3, pero en otro orden.

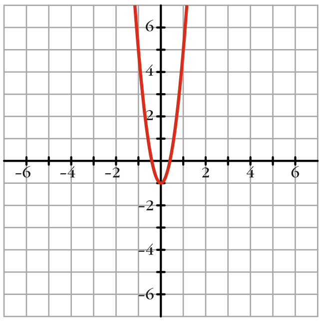
¿Cuál es la derivada de cual?

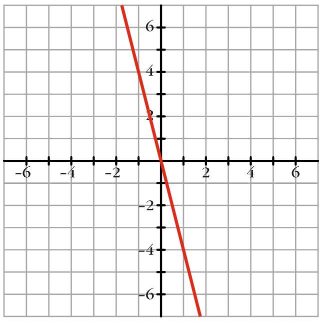
Justifica tus respuestas.

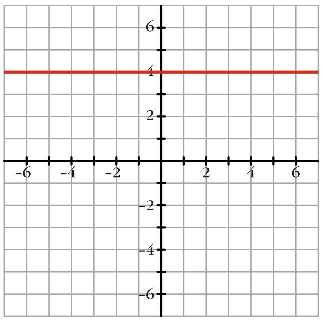
①


②


③


Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Solución:

1 – B, 2 – C, 3 – A.

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente y es negativa donde la función decrece.

Ejercicio nº 4.-

Halla la derivada de $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $x_0 = 0$ utilizando la definición.

Solución:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}}{h}$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{0}{0}.$$ Indeterminación.

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{h+2}+\sqrt{2}$ para poder simplificar la fracción.

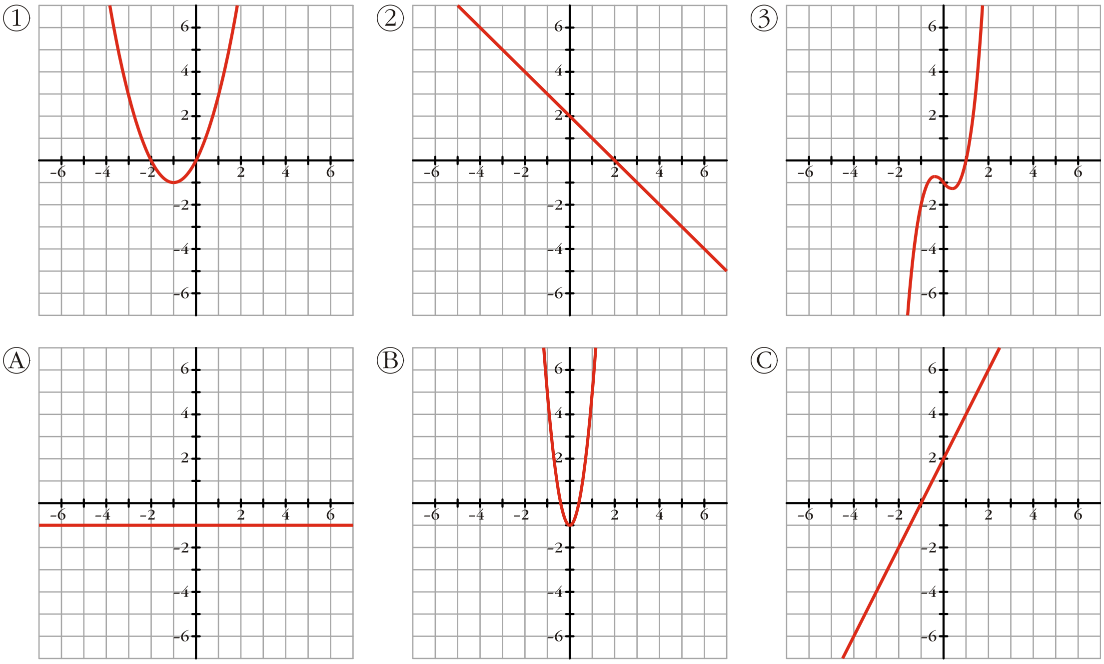
$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+2})^2-(\sqrt{2})^2}{h\cdot(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\cdot(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ejercicio nº 5.-

Las gráficas A, B y C son las funciones derivadas de las gráficas 1, 2 y 3, pero en otro orden.

¿Cuál es la derivada de cual?

Justifica tus respuestas.



Solución:

1 – C, 2 – A, 3 – B.

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente y es negativa donde la función decrece.

Ejercicio nº 6.-

Utilizando la definición, calcula $f'(1)$, sabiendo que $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Solución:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{0}{0}.$$ Indeterminación.

Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{h+2}+\sqrt{2}$ para poder simplificar la fracción.

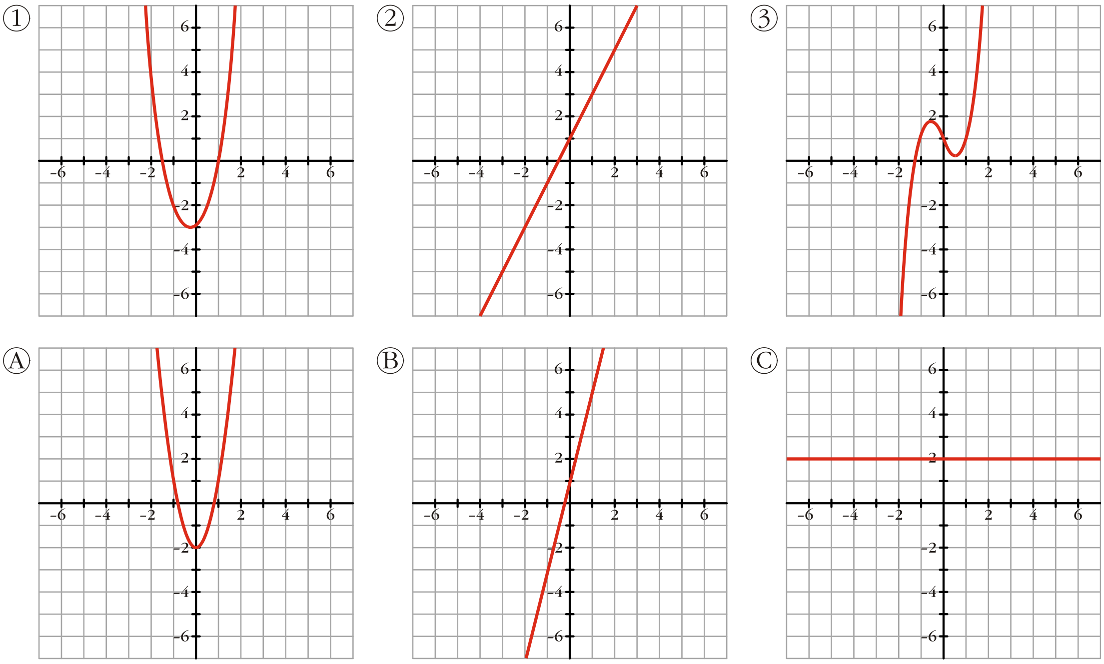
$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+2})^2-(\sqrt{2})^2}{h\cdot(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\cdot(\sqrt{h+2}+\sqrt{2})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ejercicio nº 7.-

Las gráficas A, B y C son las funciones derivadas de las gráficas 1, 2 y 3, pero en otro orden.

¿Cuál es la derivada de cual?

Justifica tus respuestas.



Solución:

1 – B, 2 – C, 3 – A.

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente y es negativa donde la función decrece.

Ejercicio nº 8.-

Si $f(x) = 2x^2 - 3$ halla su derivada en $x_0 = 1$ utilizando la definición.

Solución:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{2\cdot(1+h)^2 - \cancel{3} - 2 + \cancel{3}}{h} = \frac{4h+2h^2}{h} = 4+2h$$

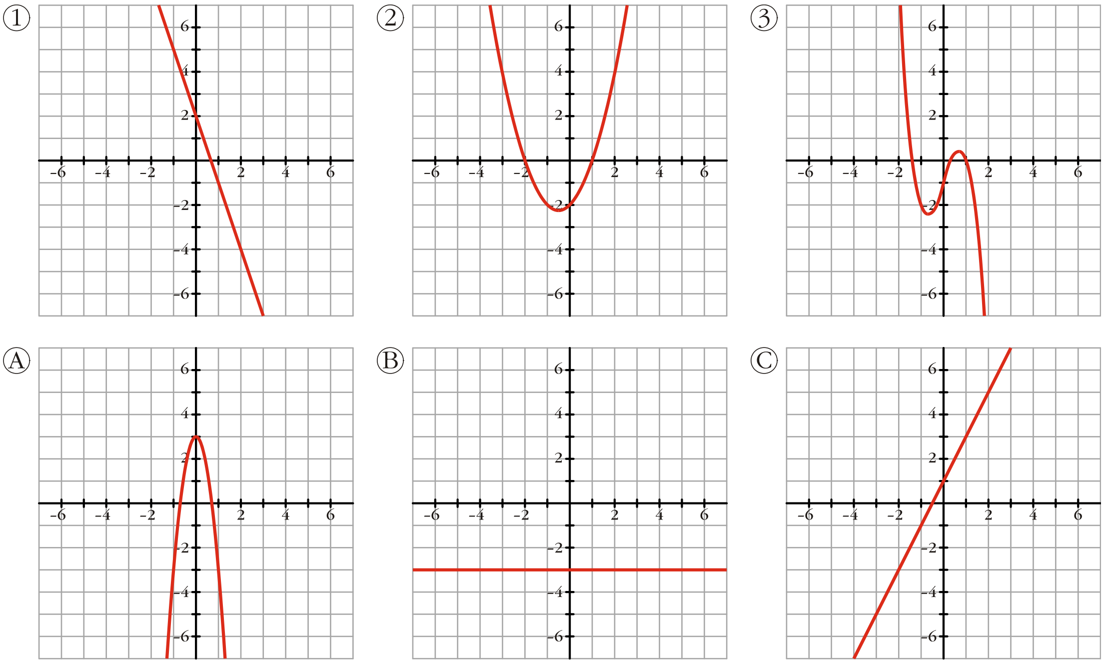
$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+2h) = 4$$

Ejercicio nº 9.-

Las gráficas A, B y C son las funciones derivadas de las gráficas 1, 2 y 3, pero en otro orden.

¿Cuál es la derivada de cual?

Justifica tus respuestas.



Solución:

1 – B, 2 – C, 3 – A.

La derivada se anula en los puntos de tangente horizontal, es positiva donde la función es creciente y es negativa donde la función decrece.

<u>Ejercicio nº 10.-</u>

Si $f(x) = -x^2 + 1$, halla su derivada en $x_0 = 2$ utilizando la definición.

Solución:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-(2+h)^2+1+2^2-1}{h} = \frac{-4h+h^2}{h} = -4+h$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}(-4+h) = -4$$

<u>Continuidad y derivabilidad</u>

<u>Ejercicio nº 11.-</u>

Hallar *a* y *b* para que la función *f(x)* sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si} \quad x<0 \\ ax+b & \text{si} \quad 0\le x<1 \\ 4x & \text{si} \quad 1\le x \end{cases}$$

Para los valores de *a* y *b* obtenidos, estudia la derivabilidad de *f*.

Solución:

CONTINUIDAD

Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$: La función es continua pues está formada por polinomios.

Para $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} a = a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b \\ f(0) = b \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Para que sea continua, ha de ser } a = b$$

Para $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + b) = a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 4x = 4 \\ f(1) = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Para que sea continua, ha de ser } a + b = 4$$

Por tanto, $a = 2$ y $b = 2$.

Para estos valores, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 4x & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

DERIVABILIDAD

Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$, $f(x)$ es derivable, además:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

Para $x = 0$.

$f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = 2$

Para $x = 1$.

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 4$

La función no es derivable en $x = 0$ y $x = 1$.

Por tanto:

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Ejercicio nº 12.-

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función definida del siguiente modo:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}-x^2+2 & \text{si} \quad x<0\\ x^2+2 & \text{si} \quad 0\le x<1\\ 3x+1 & \text{si} \quad 1\le x\end{cases}}$$

Solución:

CONTINUIDAD

Si $x\neq 0$ y $x\neq 1$.

La función es continua pues $f(x)$ es una función polinómica en cada uno de estos tres intervalos.

Para $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x^2+2\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+2\right)=2\\ f(0)=2\end{array}\right\} \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=0$$

Para $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+2\right)=3\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+1)=4\end{array}\right\} \rightarrow \text{Discontinua en } x=1$$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$

DERIVABILIDAD

Si $x\neq 0$ y $x\neq 1$, $f(x)$ es derivable y:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x & \text{si} \quad x<0\\ 2x & \text{si} \quad 0<x<1\\ 3 & \text{si} \quad 1<x\end{cases}$$

Para $x=0$.

$f'(0^-)=0=f'(0^+)=0$

La función es derivable en $x=0$.

Para $x=1$.

La función no es derivable pues no es continua.

Por tanto:

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$.

Ejercicio nº 13.-

Dada la función $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x<0 \\ x-2 & \text{si} \quad 0\le x<4 \\ x^2-4 & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$**, estudiar la continuidad y derivabilidad.**

Solución:

CONTINUIDAD

Si $x \neq 0$ y $x \neq 4$: La función es continua pues $f(x)$ es una función polinómica.

Para $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-2) = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Discontinua en } x=0$$

Para $x = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} (x-2) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \left(x^2-4\right) = 12 \end{array}\right\} \rightarrow \text{ Discontinua en } x=4$$

Por tanto: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0, 4\}$.

DERIVABILIDAD

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 4\}$, pues es una función polinómica en cada uno de estos tres intervalos.

La función no es derivable en $x = 0$ y $x = 4$, pues es discontinua en estos puntos.

Ejercicio nº 14.-

Calcular m y n para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+m & x\le -1 \\ x^2-nx & x>-1 \end{cases}$$

Solución:

Para que sea derivable, primero ha de ser continua.

Si $x \neq -1$, la función es continua, pues está formada por dos polinomios.

Para $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \left(x^2+3x+m\right) = -2+m \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \left(x^2-nx\right) = 1+n \\ f(-1) = -2+m \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x = -1$, ha de ser:

$$-2 + m = 1 + n \quad \rightarrow \quad m = n + 3$$

DERIVABILIDAD

Si $x \neq -1$, la función es derivable, además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < -1 \\ 2x - n & x > -1 \end{cases}$$

En $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-) = 1 \\ f'(-1^+) = -2 - n \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable en } x = -1, \text{ ha de ser: } 1 = -2 - n \;\rightarrow\; n = -3 \;\rightarrow m = 0$$

Ejercicio nº 15.-

Hallar *a* y *b* para que la función *f* (*x*) sea continua:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} -ax & \text{si} \quad x < -1 \\ ax - b & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 2x & \text{si} \quad 1 \leq x \end{cases}}$$

Para los valores de *a* y *b* obtenidos, estudia la derivabilidad.

Solución:

Si $x \neq -1$ y $x \neq 1$, la función es continua, pues está formada por polinomios.

Para $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (-ax) = a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (ax - b) = -a - b \\ f(-1) = -a - b \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser: } 2a = -b$$

Para $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax - b) = a - b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2x = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \text{Para que sea continua, ha de ser: } a - b = 2$$

Por tanto, $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{-4}{3}$

Para estos valores, queda:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-2x}{3} & \text{si} \quad x<-1 \\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{3} & \text{si} \quad -1\le x<1 \\ 2x & \text{si} \quad 1\le x \end{cases}$$

DERIVABILIDAD

Si $x \neq -1$ y $x \neq 1$, $f(x)$ es derivable, además:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-2}{3} & \text{si} \quad x<-1 \\ \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad -1<x<1 \\ 2 & \text{si} \quad 1<x \end{cases}$$

Para $x=-1$.

$$f'\left(-1^-\right)=\frac{-2}{3}\neq f'\left(-1^+\right)=\frac{2}{3}$$

Para $x=1$.

$$f'\left(1^-\right)=\frac{2}{3}\neq f'\left(1^+\right)=2$$

La función no es derivable en $x=-1$ y $x=1$.

Por tanto:

$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{-1, 1\}$.

Cálculo de derivadas

Ejercicio nº 16.-

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y=\ln\dfrac{1-e^x}{1+e^x}}$ **b)** $\boldsymbol{y=\sqrt[3]{\cos\left(x^3-1\right)}}$

Solución:

a) $y=\ln(1-e^x)-\ln(1+e^x)$

$$y'=\frac{-e^x}{1-e^x}-\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{-e^x\cdot(1+e^x)-e^x\cdot(1-e^x)}{(1-e^x)\cdot(1+e^x)}=\frac{-2e^x}{1-e^{2x}}$$

b) $$y'=\frac{-sen\,(x^3-1)\cdot 3x^2}{3\sqrt[3]{cos^2(x^3-1)}}=\frac{-x^2\cdot sen\,(x^3-1)}{\sqrt[3]{cos^2(x^3-1)}}$$

Ejercicio nº 17.-

Aplica la derivación logarítmica para derivar:

$$y = x^{\cos x}$$

Solución:

$f(x) = x^{\cos x}$

$\ln f(x) = \cos x \cdot \ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\operatorname{sen} x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(-\operatorname{sen} x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right) = x^{\cos x} \cdot \left(-\operatorname{sen} x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right)$$

Ejercicio nº 18.-

Calcula la derivada de la siguiente función implícita: $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Solución:

$8x + 18yy' = 0$

$$y' = \frac{-8x}{18y}$$

Ejercicio nº 19.-

Sabiendo que la derivada de $f(x) = \cos x$ es $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, calcula la derivada de $f^{-1}(x) = \operatorname{arc} \cos x$.

Solución:

$f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ejercicio nº 20.-

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{3^{5x}}{2x-1}$ **b)** $y = 3^x \cdot \cos\left(x^2 - 1\right)$

Solución:

a) $y' = \dfrac{5 \cdot 3^{5x} \cdot \ln 3\,(2x-1) - 2 \cdot 3^{5x}}{(2x-1)^2} = \dfrac{3^{5x} \cdot [5(2x-1) \cdot \ln 3 - 2]}{(2x-1)^2}$

b) $y' = 3^x \cdot \ln 3 \cdot \cos (x^2 - 1) - 3^x \cdot \operatorname{sen} (x^2 - 1) \cdot 2x =$

$= 3^x \cdot [\ln 3 \cdot \cos (x^2 - 1) - 2x \cdot \operatorname{sen} (x^2 - 1)]$

<u>Ejercicio nº 21.-</u>

Aplica la derivación logarítmica para derivar:

$$\boldsymbol{y = (x + 1)^{x^2}}$$

Solución:

$f (x) = (x + 1)^{x^2}$

$\ln f (x) = x^2 \cdot \ln (x + 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \cdot \ln(x+1) + x^2 \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(2x \cdot \ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}\right) = (x+1)^{x^2} \cdot \left(2x \cdot \ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}\right)$$

<u>Ejercicio nº 22.-</u>

Halla $\boldsymbol{y'}$ sabiendo que: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = x^2 \cdot y^2}$.

Solución:

$2x + 2yy' = 2xy^2 + 2x^2yy'$

$2yy' \cdot (1 - x^2) = 2x \cdot (y^2 - 1)$

$$y' = \frac{x \cdot (y^2 - 1)}{y \cdot (1 - x^2)}$$

<u>Ejercicio nº 23.-</u>

Dada la función $\boldsymbol{f(x) = e^x}$ y conocida su derivada $\boldsymbol{f'(x) = e^x}$. Halla la derivada de la función $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \ln x}$.

Solución:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

<u>Ejercicio nº 24.-</u>

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = 4 \cdot \arccos\sqrt{x}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \log_3\left(x^2 - 4\right)}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{-4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{-2}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}}$

b) $y' = \dfrac{2x}{ln\,3 \cdot \left(x^2 - 4\right)}$

<u>Ejercicio nº 25.-</u>

Aplica la derivación logarítmica para derivar:

$$\boldsymbol{y = \left(\frac{2}{x}\right)^x}$$

Solución:

$f(x) = \left(\dfrac{2}{x}\right)^x \quad \rightarrow \quad ln\,f(x) = x \cdot ln\left(\dfrac{2}{x}\right)$

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = ln\left(\dfrac{2}{x}\right) + x \cdot \dfrac{\dfrac{-2}{x^2}}{\dfrac{2}{x}} = ln\left(\dfrac{2}{x}\right) - 1$

$f'(x) = f(x) \cdot \left(ln\left(\dfrac{2}{x}\right) - 1\right) = \left(\dfrac{2}{x}\right)^x \cdot \left(ln\left(\dfrac{2}{x}\right) - 1\right)$

<u>Ejercicio nº 26.-</u>

Dada la función implícita $x^2 - 3xy - 2y^2 = 4$, calcula su derivada.

Solución:

$2x - 3y - 3xy' - 4yy' = 0$

$2x - 3y = y' \cdot (3x + 4y)$

$y' = \dfrac{2x - 3y}{3x + 4y}$

<u>Ejercicio nº 27.-</u>

Conocida la función $f(x) = ln\,x$ y su derivada $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, calcula la derivada de $f^{-1}(x) = e^x$.

Solución:

$\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}} = e^x$

Ejercicio nº 28.-

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{y = ln\frac{4-5x}{2x+3}}$ **b)** $\boldsymbol{y = \frac{sen\, x}{x^2}}$

Solución:

a) $y = ln\frac{4-5x}{2x+3} = ln(4-5x) - ln(2x+3)$

$$y' = \frac{-5}{4-5x} - \frac{2}{2x+3} = \frac{-5(2x+3)-2(4-5x)}{(4-5x)\cdot(2x+3)} = \frac{-23}{(4-5x)\cdot(2x+3)}$$

b) $y' = \frac{cos\, x \cdot x^2 - sen\, x \cdot 2x}{x^4} = \frac{cos\, x \cdot x - 2sen\, x}{x^3}$

Ejercicio nº 29.-

Mediante la derivación logarítmica, calcula la derivada de $\boldsymbol{y = (ln\, x)^x}$**.**

Solución:

$f(x) = (ln\, x)^x$

$ln\, f(x) = x \cdot ln\,(ln\, x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = ln(ln\, x) + x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{ln\, x} = ln(ln\, x) + \frac{1}{ln\, x}$$

$$f'(x) = f(x)\cdot\left(ln(ln\, x) + \frac{1}{ln\, x}\right) = (ln\, x)^x \cdot \left(ln(ln\, x) + \frac{1}{ln\, x}\right)$$

Ejercicio nº 30.-

Halla la derivada de la siguiente función implícita: $\boldsymbol{x^3 + 6xy + y^3 = 8}$**.**

Solución:

$3x^2 + 6y + 6xy' + 3y^2 \cdot y' = 0$

$3y' \cdot (2x + y^2) = -3 \cdot (x^2 + 2y)$

$$y' = \frac{-(x^2 + 2y)}{2x + y^2}$$

Ejercicio nº 31.-

Teniendo en cuenta que la derivada de la función $\boldsymbol{f(x) = tg\, x}$ **es** $\boldsymbol{f'(x) = 1 + tg^2\, x}$**, halla la derivada de** $\boldsymbol{f^{-1}(x) = arc\ tg\, x}$**.**

Solución:

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{1+(tg\,(arc\,tg\,x))^2}=\frac{1}{1+x^2}$$

Ejercicio nº 32.-

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y=5\cdot arctg\left(2x-1\right)$ **b)** $y=\sqrt[3]{x^5+2}$

Solución:

a) $y'=\dfrac{5\cdot 2}{1+\left(2x-1\right)^2}=\dfrac{10}{1+\left(2x-1\right)^2}$

b) $y'=\dfrac{5x^4}{3\cdot\sqrt[3]{\left(x^5+2\right)^2}}$

Ejercicio nº 33-

Deriva logarítmicamente la siguiente función:

$y=(\cos x)^x$

Solución:

$f(x)=(\cos x)^x$

$\ln f(x)=x\cdot\ln\cos x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\cos x+x\cdot\frac{-\,sen\,x}{\cos x}=\ln\cos x-x\cdot tg\,x$$

$f'(x)=f(x)\cdot(\ln\cos x-x\,tg\,x)=(\cos x)^x\cdot(\ln\cos x-x\,tg\,x)$

Ejercicio nº 34.-

Calcula la derivada de la siguiente función implícita: $xy-2x+3y=4$.

Solución:

$y+xy'-2+3y'=0$

$y'\cdot\left(x+3\right)=2-y\quad\to\quad y'=\dfrac{2-y}{x+3}$

Ejercicio nº 35.-

Conocida la función $f(x)=x^5$ **y su derivada** $f'(x)=5x^4$. **Calcula la derivada de** $f^{-1}(x)=\sqrt[5]{x}$.

Solución:

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{x^4}}$$

Cuestiones sobre derivadas

Ejercicio nº 36.-

Demuestra que la función $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ no es derivable ni en $x = -2$ ni en $x = 1$.

Solución:

$$|x+2|=\begin{cases}-x-2 & \text{si} \quad x<-2\\ x+2 & \text{si} \quad x\geq -2\end{cases}$$

$$|x-1|=\begin{cases}-x+1 & \text{si} \quad x<1\\ x-1 & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$$

$-x-2$		$x+2$		$x+2$
$-x+1$	-2	$-x+1$	-1	$x-1$

$$f(x)=\begin{cases}-2x-1 & \text{si} \quad x<-2\\ 3 & \text{si} \quad -2\leq x<1\\ 2x+1 & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & \text{si} \quad x<-2\\ 0 & \text{si} \quad -2<x<1\\ 2 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

$f'(-2^-) = -2 \neq f'(-2^+) = 0 \quad \rightarrow \quad f$ no es derivable en $x = -2$

$f'(1^-) = 0 \neq f'(1^+) = 2 \quad \rightarrow \quad f$ es derivable en $x = 1$

Ejercicio nº 37.-

Demuestra, utilizando la definición de derivada, que la función $f(x) = (x + 1) \cdot |x|$ no es derivable en $x = 0$.

Solución:

$$|x|=\begin{cases}-x & \text{si} \quad x<0\\ x & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

$$f(x)=(x+1)\cdot|x|=\begin{cases}-x^2-x & \text{si} \quad x<0\\ x^2+x & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

Si $x \neq 0$, entonces:

$$f'(x)=\begin{cases} -2x-1 & \text{si} \quad x<0 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

En $x=0$.

$$f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$$

Por tanto, f no es derivable en $x=0$.

<u>Ejercicio nº 38.-</u>

Prueba que la función $f(x) = \ln \cos x$, verifica la siguiente igualdad:

$$f''(x)=\frac{-1}{e^{2f(x)}}$$

Solución:

$$f'(x)=\frac{-sen\, x}{\cos x}=-tg\, x$$

$$f''(x)=-\frac{1}{\cos^2 x}$$

$f(x) = \ln \cos x \quad \rightarrow \quad e^{f(x)} = \cos x$

Por tanto, $f''(x)=\dfrac{-1}{e^{2f(x)}}$.

<u>Ejercicio nº 39.-</u>

Demuestra que todas las derivadas de orden par de la función $f(x)=\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ se anulan para el valor $x=\pi$.

Solución:

$$f^{I}(x)=\frac{-1}{2}\, sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f^{II}(x)=\frac{-1}{4}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f^{III}(x)=\frac{+1}{8}\, sen\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$f^{IV}(x)=\frac{+1}{16}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

...

En general, las derivadas de orden par son de la forma:

$f^{2n}(x) = k \cdot cos\left(\frac{x}{2}\right)$, donde k es una constante.

Por tanto, se anulan todas en $x = \pi$, pues $cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ejercicio nº 40.-

Prueba que la función $f(x) = e^x \cos x$ verifica la siguiente ecuación:

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$$

Solución:

$f'(x) = e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x$

$f''(x) = e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x - e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x = -2\, e^x \operatorname{sen} x$

Así, $-2\, e^x \operatorname{sen} x - 2(e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x) + 2\, e^x \cos x = 0$